Teachingninja.in

Latest Govt Job updates

Private Job updates

Free Mock tests available

Visit - teachingninja.in

UPPSC
Mains
Previous Year Paper
2021 Mathematics
Paper-I

Teachingninja.in

2022

गणित (प्रश्न–पत्र – I)

MATHEMATICS (PAPER – I)

निर्धारित समय : तीन घंटे] [अधिकतम अंक : 200

Time Allowed : Three Hours] [Maximum Marks : 200

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें :

(I) इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो** खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं ।

(II) उम्मीदवार को **कुल पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

(III) प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से **प्रत्येक** खण्ड से कम से कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(IV) **प्रत्येक** प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

(V) **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं ।

नोट : प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो । प्रश्न–सह–उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए ।

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

(I) There are **eight** questions divided in **two** Sections and printed **both** in **Hindi** and in **English**.

(II) Candidates has to attempt **five** questions in **all**.

(III) Question Nos. **1** and **5** are **compulsory** and out of the remaining **three** are to be attempted choosing at least **one** question from **each** Section.

(IV) The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

(V) **All** questions carry **equal** marks.

Note : Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-Cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

Teachingninja.in

1. (a) किसी आव्यूह के सोपानक रूप तथा इसके आव्यूह की कोटि ज्ञात करने में उपयोगिता एक उदाहरण द्वारा समझाइये। 15

Explain the echelon form of a matrix and its utility in determining the rank of a matrix by an example.

(b) सिद्ध कीजिये कि हरमीशियन आव्यूह के भिन्न भिन्न अभिलाक्षणिक मूल के सदिश एक दूसरे पर लम्ब हैं। 15

Prove that characteristic vectors of a Hermitian matrix for distinct eigen values are orthogonal.

(c) दर्शाइये कि साधारण पंक्ति – स्तम्भ रूपान्तरण एक आव्यूह के कोटि (रैंक) को नहीं बदलते। 10

Show that elementary row – column transformation do not change the rank of a matrix.

2. (a) दर्शाइये कि एक परिमित जनित सदिश समष्टि V(F) का कोई भी रैखिकत: स्वतंत्र उपसमुच्चय, V का एक आधार बनाने के लिये विस्तारित किया जा सकता है। 15

Show that every linearly independent subset of a finitely generated vector space V(F) can be extended to form a basis of V.

(b) सिद्ध कीजिये कि दो परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ U(F) तथा V(F) समाकारी हैं, यदि और केवल यदि dim U = dim V. 15

Prove that two finite dimensional vector space **U(F) and V(F)** are isomorphic, if and only if dim U = dim V.

(c) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ के लिये कैले–हैमिल्टन प्रमेय को प्रमाणित कीजिये तथा इससे A^{-1} ज्ञात कीजिये। 10

Verify Cayley-Hamilton's theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Hence find A^{-1}.

3. (a) उस गोले का समीकरण ज्ञात करें जो कि वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ से गुजरता (pass) हो और तल $4x + 3y - 15 = 0$ को स्पर्श करता हो। 15

Find the equation of the sphere which passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touch the plane $4x + 3y - 15 = 0$.

Teachingninja.in

(b) दिखाइये कि शांकव $l/r = 1 + e\cos\theta$ का नियामक वृत्त $r^2(1-e^2) + 2elr\cos\theta - 2l^2 = 0$ है । **15**

Show that the director circle of the conic $l/r = 1 + e\cos\theta$ is $r^2(1-e^2) + 2elr\cos\theta - 2l^2 = 0$.

(c) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर बिन्दु $(\alpha + \beta + \gamma)$ से स्पर्शी तल खींचे गये हैं । सिद्ध कीजिये कि मूल बिन्दु से इन तलों पर डाले गये लम्ब द्वारा जनित शंकु $(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ है । **10**

Tangent planes on the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ are drawn from the point (α, β, γ). Prove that the perpendiculars drawn from the origin on these planes generate the cone $(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$.

4. (a) दर्शाइये कि फलन $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x \neq 0, y \neq 0$ तथा $f(0,0) = 0$ मूल बिन्दु पर सतत है । **15**

Show that the function $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x \neq 0, y \neq 0$ and $f(0,0) = 0$ is continuous at the origin.

(b) सिद्ध कीजिये कि $\beta(m,n) = \frac{\Gamma m \, \Gamma n}{\Gamma(m+n)}$ । **15**

Prove that $\beta(m,n) = \frac{\Gamma m \, \Gamma n}{\Gamma(m+n)}$.

(c) सरल रेखा $y = x$ तथा परवलय $y = 4x - x^2$ के बीच परिबद्ध क्षेत्र पर $\iint y\,dx\,dy$ का मान ज्ञात कीजिये । **10**

Evaluate $\iint y\,dx\,dy$ over the region bounded between the line $y = x$ and the parabola $y = 4x - x^2$.

खण्ड – ब / SECTION - B

5. (a) निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिये :

$(y^2 + 2x^2y)\,dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0.$ **15**

Solve the following differential equation :

$(y^2 + 2x^2y)\,dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0.$

(b) वक्र $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$ का अनुरेखण कीजिये । **15**

Trace the curve $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$.

P.T.O.

Teachingninja.in

(c) दर्शाइये कि $x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) - a^3(x + y) + a^4 = 0$ की अनन्त स्पर्शियाँ एक वर्ग की रचना करती है, जिनके दो शीर्ष बिन्दुओं से होकर वक्र जाता है ।

Show that the asymptotes of $x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) - a^3(x + y) + a^4 = 0$ form a square, through two of whose angular points the curve passes.

6. (a) स्टोक्स के प्रमेय की जाँच कीजिये जबकि $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ तथा पृष्ठ गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के xy – तल के ऊपर का भाग है ।

Verify Stoke's theorem when $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ and surface is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the xy – plane.

(b) प्रथम एवं द्वितीय प्रकार के क्रिस्टोफल प्रतीकों को परिभाषित कीजिये तथा उनमें आपस में एक सम्बन्ध ज्ञात कीजिये ।

Define Christoffel's symbols of first and second kind and obtain a relation between the two.

(c) सिद्ध कीजिये कि हेलिक्स $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = a\theta\tan\alpha$ की वक्रता एवं मरोड़ क्रमशः $\frac{\cos^2\alpha}{a}$ एवं $\frac{\cos^3\alpha}{a\sin\alpha}$ हैं ।

Show that the curvature and torsion of the helix $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = a\theta\tan\alpha$ are given by $\frac{\cos^2\alpha}{a}$ and $\frac{\cos^3\alpha}{a\sin\alpha}$ respectively.

7. (a) यदि A_{ij} एक सहपरिवर्ती सदिश का कर्ल है, तो सिद्ध कीजिये कि $A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$ ।

If A_{ij} is the curl of a covariant vector, then prove that $A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$.

(b) सिद्ध कीजिये कि टेन्सरों से रूपान्तरण एक ग्रुप बनाते हैं ।

Show that the transformations of tensors form a group.

(c) प्रदिश भागफल के नियम का उल्लेख कीजिये तथा सिद्ध कीजिये ।

State and prove quotient law of tensors.

Teachingninja.in

8. (a) एक समान भारी छड़ जिसकी लम्बाई 2a है, दो चिकने झुके हुये सतहों पर अपने सिरों से निरापावस्था में स्थित है। सतहों का क्षैतिज झुकाव α तथा β है। यदि छड़ का क्षैतिज झुकाव θ हो, तो कल्पित कार्य का सिद्धांत द्वारा सिद्ध कीजिये कि $\tan\theta = 1/2 (\cot\alpha - \cot\beta)$। 15

A heavy uniform rod of length 2a, rests with its ends in contact with two smooth inclined planes of inclination α and β to the horizon. If θ be the inclination of the rod to the horizon, prove by the principle of virtual work, that $\tan\theta = 1/2 (\cot\alpha - \cot\beta)$.

(b) एक प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा स्थिर है तथा दूसरे सिरे से एक भारी कण बाँध दिया जाता है, जो डोरी को उसकी वास्तविक लम्बाई α के दो गुना बड़ा करने में पर्याप्त है, उसे चार गुना ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर खींच कर छोड़ दिया जाता है, दिखाइये कि कण इस बिन्दु पर $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$ समय में वापस आयेगा। 15

One end of an elastic string is fixed and to the other end is fastened a particle heavy enough to stretch the string to double its natural length α. The string is drawn vertically down till it is four times its natural length and then let go. Show that the particle returns to this point in time $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$

(c) केपलर के गति के नियमों को लिखिये और इसके निगमनों का कथन कीजिए। 10

State Kepler's Law of motion and state its deduction.

Teachingninja.in